Використання геометричних підходів для аналізу біологічних структур і медичних задач

Dr. F. Moreau[1], Dr. E. Girard[1], Dr. C. Lambert[1], Dr. J. Fournier[1]*

[1] Department of Internal Medicine and Biomedical Research, Université de Toulouse, Toulouse, France

Геометричні задачі, які включають до завдань математичної олімпіади в Україні на кожному етапі, викликають значні утруднення в учнів, якщо їх розв’язання потребує знання понять, фактів про геометричні фігури, які не включено до навчальної програми з геометрії для 7-9 класів. Прикладом такого поняття є поняття радикальної вісі двох кіл.

Мета статті – розробити окремі методичні рекомендації щодо навчання учнів розв’язувати задачі з теми «Радикальна вісь двох кіл та її властивості».

Теореми та факти, пов’язані з радикальною віссю кіл, допомагають розв’язувати задачі, в яких треба довести, що: три прямі перетинаються в одній точці; три точки належать одній прямій; прямі перпендикулярні тощо. Так, щоб довести, що три прямі перетинаються в одній точці, треба довести, що ці прямі є радикальними осями попарно взятих трьох кіл, а щоб довести, що дві прямі перпендикулярні, треба довести, що одна з цих прямих є радикальною віссю двох кіл, а інша – лінією їх центрів.

Вважаємо, що тільки спеціальним чином побудована система задач сприяє досягненню планових результатів. До системи задач з теми «Радикальна вісь кіл та її властивості» доцільно включати задачі на побудову, доведення, дослідження та на обчислення; враховувати функції певної задачі в системі задач (задачі, що призначені для встановлення певного математичного факту (базова задача), і ті, головна функція яких – демонстрація правила застосування того чи іншого прийому, методу розв’язування класу задач (опорна задача)). Навколо базових і опорних задач доцільно, нарощуючи складність задач, створювати блоки задач на їх відпрацювання. Складність певної задачі блоку залежить від кількості геометричних об’єктів, поданих достатньо для формування вміння застосовувати факт чи прийом учнем у задачі, кількості й типу зв’язків між ними, кількості кроків розв’язування. Кількість задач у блоках доцільно добирати залежно від рівня навчальності учнів.

Доцільно використовувати програму GeoGebra для демонстрації: готових рисунків; процесу зміни геометричних об’єктів в залежності від зміни їх параметрів; геометричних фігур в різних ракурсах; покрокової побудови рисунка.

Ключові слова: навчання учнів, геометрія, радикальна вісь, властивості радикальної вісі, підготовка до олімпіади з математики,

степінь точки, радикальний центр, програма GeoGebra.

Постановка проблеми. Учнівські математичні олімпіади в Україні мають давні традиції. Ще в 1935 році з ініціативи академіка Михайла Пилиповича Кравчука за участі викладачів фізико-математичного факультету Київського університету були започатковані Київські міські математичні олімпіади. Тим самим уперше в Україні була реалізована ідея наукової олімпіади для школярів, яка пізніше знайшла підтримку та втілення в інших регіонах нашої країни [11]. Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики проводиться щороку серед учнів загальноосвітніх навчальних закладів у чотири етапи: шкільний, районний, обласний, всеукраїнський. Починаючи з 1993 року збірна команда України приймає участь у Міжнародних математичних олімпіадах. Саме тоді виникла потреба у створенні власної потужної системи відбору та підготовки команд України до участі у Міжнародних математичних олімпіадах [12].

На кожному етапі проведення математичної олімпіади до завдань включено як мінімум одну геометричну задачу [5]. Геометричні задачі зазвичай викликають утруднення в учнів, якщо їх розв’язання потребує знання понять, фактів про геометричні фігури, які не включено до навчальної програми з геометрії для 7-9 класів. Прикладом такого поняття є поняття радикальної вісі двох кіл [7; 8].

Аналіз актуальних досліджень. Задачі, які можна розв’язати із застосуванням властивостей радикальної вісі, включено до різних збірників задач з геометрії [3; 5; 10; 11; 12; 13]. Однак аналіз шкільних підручників з геометрії показав, що тільки у підручнику для поглибленого вивчення геометрії для 9 класу (автори А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський і М. С. Якір [6]) у рубриці «Коли зроблено уроки» подано короткі відомості про радикальну вісь. Методичні особливості застосування радикальної вісі до розв’язування задач на побудову розглянуто у працях І.Г. Ленчука, А.С. Франовського, О.А. Кадубовського, А.С. Бунакової [1; 4]. Аналіз результатів математичних олімпіад України свідчить про потребу у вдосконаленні методів навчання розв'язувати геометричні задачі високого рівня складності [13].

Мета статті – розробити окремі методичні рекомендації щодо навчання учнів розв'язувати задачі з теми «Радикальна вісь двох кіл та її властивості».

Виклад основного матеріалу. Ступенем точки відносно кола називається величина $d^2 - R^2$, де R – радіус кола, а d – відстань від даної точки до центра кола. Для двох кіл геометричним місцем точок, які мають однакові степені відносно цих кіл, є пряма, яку називають радикальною віссю даних кіл. Властивості радикальної вісі:

1) радикальна вісь двох кіл перпендикулярна до прямої, що містить їх центри;
2) якщо P – точка радикальної вісі, то довжини дотичних з точки P до обох кіл рівні;
3) радикальна вісь ділить навпіл відрізки спільних дотичних;
4) геометричне місце центрів кіл, ортогональних двом даним, є їх радикальна вісь без їх спільної хорди [9].

Якщо центри трьох кіл не лежать на одній прямій і для кожної пари кіл проведено радикальну вісь, то всі три радикальні осі перетинаються в одній точці. Цю точку називають радикальним центром трьох кіл.

Теореми та факти щодо радикальної вісі, допомагають розв'язувати задачі, в яких треба довести, що: три прямі перетинаються в одній точці; три точки належать одній прямій; прямі перпендикулярні тощо.

1. Доведення перетину трьох прямих в одній точці.

Щоб довести, що три задані прямі перетинаються в одній точці, треба довести, що ці прямі є радикальними осями попарно взятих трьох кіл. Для прикладу розглянемо задачу, яка пропонувалася на LXX Київській міській олімпіаді юних математиків (2015 рік) [5].

Задача. У гострокутному нерівнобедреному трикутнику ABC продовження медіани BM перетинає описане коло у точці N. На цьому колі відмітимо таку точку D, що ∠BDH = 90°, де H – точка перетину висот трикутника ABC. Точка K обрана таким чином, що AKCN – паралелограм. Доведіть, що прямі AC, KH і BD перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Відшукаємо три кола, для яких прямі AC, KH і BD є відповідно радикальними осями. Нехай AA_1 і CC_1 – висоти трикутника ABC (рис. 1). Так як чотирикутники BC_1HA_1 і BANC – вписані, то $\angle A_1HC_1 = 180° - \angle B$ і $\angle ANC = 180° - \angle B$. Звідси випливає, що $\angle A_1HC_1 = \angle ANC$. Але $\angle ANC = \angle A_1HC_1$ і $\angle AKC = \angle ANC$ кути паралелограма. Тому одержимо, що $\angle AHC = \angle AKC$, тобто чотирикутник AKCN – вписаний.

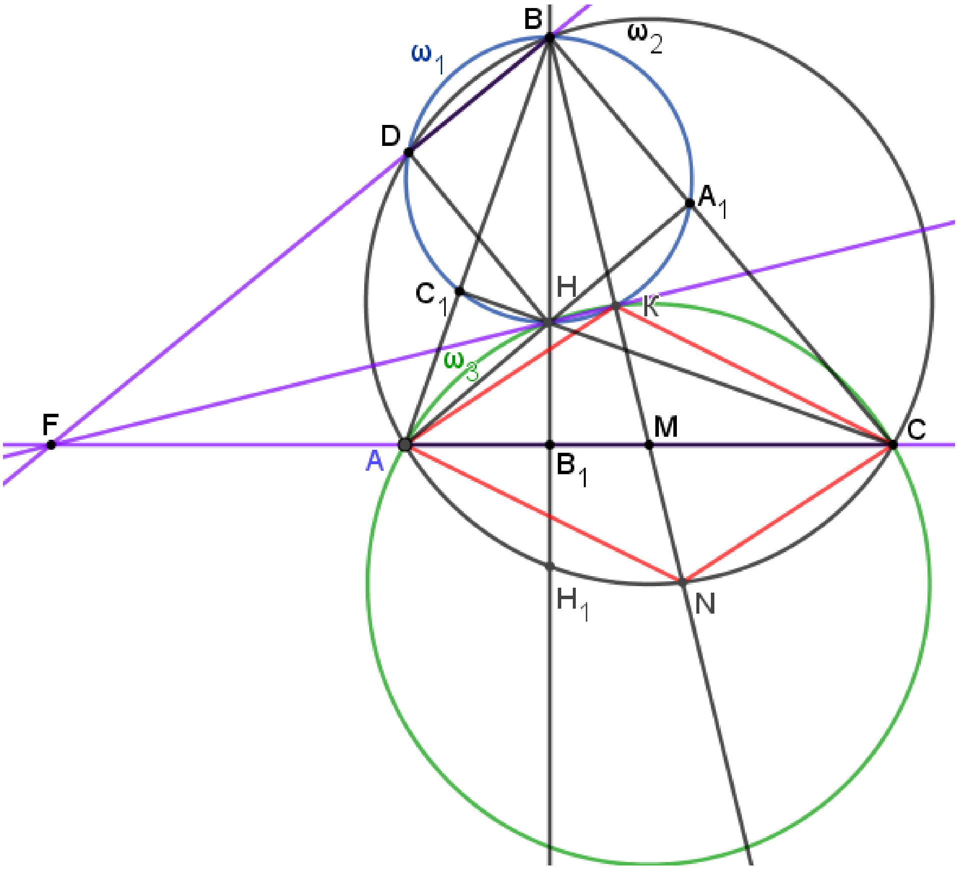

Рис. 1.

Нехай ω_1 – коло з діаметром BH (це коло проходить через точки B, D, A_1, H і C_1), ω_2 – описане коло трикутника ABC, а ω_3 – описане коло чотирикутника AHKC. Тоді BD – радикальна вісь кіл ω_1 і ω_2, KH – радикальна вісь кіл ω_1 і ω_3, AC – радикальна вісь кіл ω_2 і ω_3, Як відомо: радикальні осі трьох кіл перетинаються в одній точці – радикальному центрі трьох кіл. Отже, прямі AC, KH і BD перетинаються в одній точці.

2. Доведення перпендикулярності двох прямих.

Щоб довести, що дві дані прямі перпендикулярні, треба довести, що одна з цих прямих є радикальною віссю двох кіл, а інша – прямою їх центрів (властивість 1). Прикладом є наступна задача.

Задача. Нехай AA_1 і BB_1 – висоти гострокутного нерівнобедреного трикутника ABC. Відомо, що відрізок A_1B_1 перетинає середню лінію, паралельну AB, у точці C'. Доведіть, що відрізок CC' перпендикулярний до прямої, яка проходить через точку перетину висот і центр описаного кола навколо трикутника ABC.

Розв'язання. Позначимо в трикутнику ABC за A_0, B_0 – середини сторін BC і CA (рис. 2), за H – точку перетину висот трикутника, за O – центр описаного кола навколо трикутника ABC. Нехай ω_1 – коло, що проходить через точки A_1, B_1, A_0, B_0; ω_2 – коло, що проходить через точки A_1, B_1, C, H, діаметр кола – відрізок CH; а ω_3 – коло, що проходить через точки A_0, B_0, C, O, діаметр кола – відрізок CO. A_1B_1 – радикальна вісь кіл ω_1 і ω_2, а A_0B_0 – радикальна вісь кіл ω_1 і ω_3. Тоді точка перетину прямих A_1B_1 і A_0B_0 – точка C' є радикальним центром кіл ω_1, ω_2 і ω_3. Отже, радикальна вісь кіл ω_2 і ω_3 також проходить через точку C'. Тоді CC' – радикальна вісь кіл ω_2 і ω_3. За властивістю: радикальна вісь двох кіл перпендикулярна до лінії їх центрів, пряма CC' перпендикулярна до прямої центрів кіл ω_2 і ω_3, тобто прямої, що проходить через середини CH і CO. Отже, пряма CC' перпендикулярна і до прямої HO.

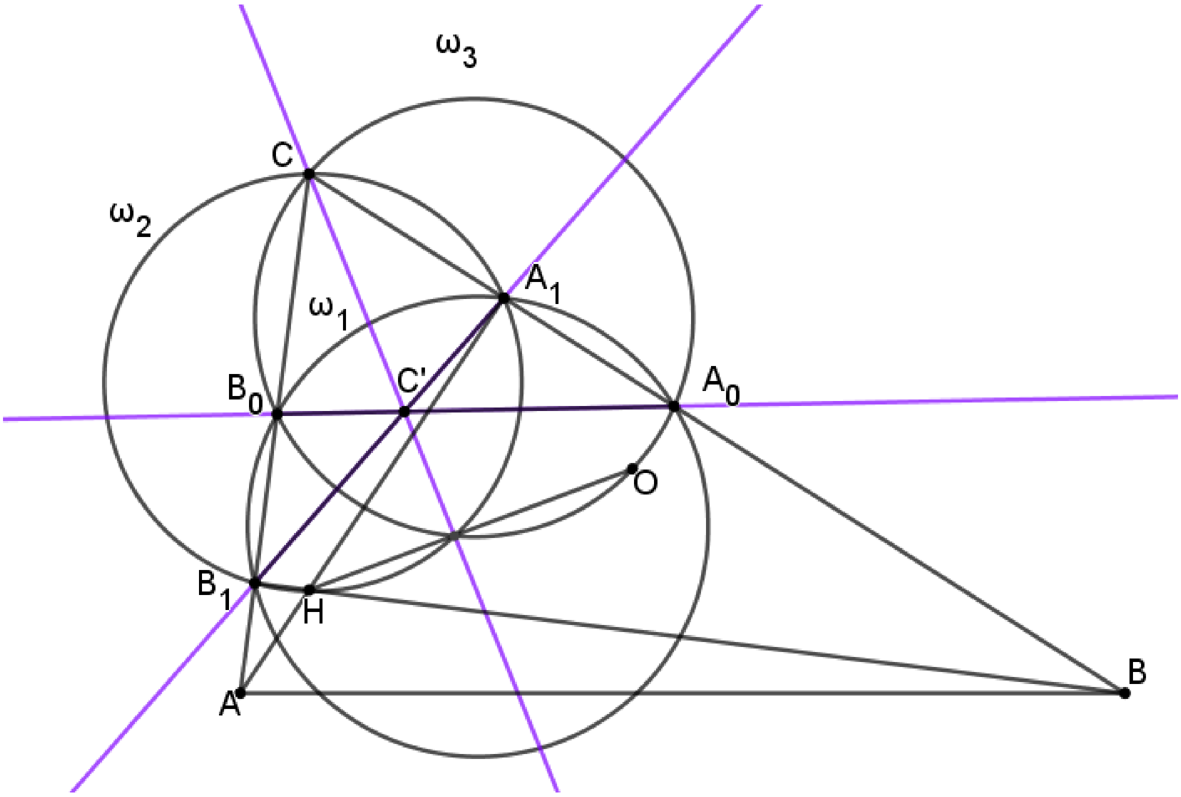

Рис. 2.

3. Доведення того факту, що три точки лежать на одній прямій.

Довести, що три точки, нехай точки A, B і C, лежать на одній прямій можна по-різному. Наприклад, можна довести, що існують такі три кола, для яких точка C є радикальним центром, а пряма AB – радикальною віссю двох з них, або можна довести, що існують два кола, для яких пряма AB є радикальною віссю, а точка C їй належить. Розглянемо задачу.

Задача. Точки M і N лежать відповідно на сторонах AC і AB трикутника ABC. На відрізках BM і CN як на діаметрах побудовано кола ω_1 і ω_2, які перетинаються у точках P і F. Доведіть, що точки P, F і ортоцентр трикутника ABC лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай BB_1 і CC_1 – висоти трикутника ABC, H – його ортоцентр (рис. 3).

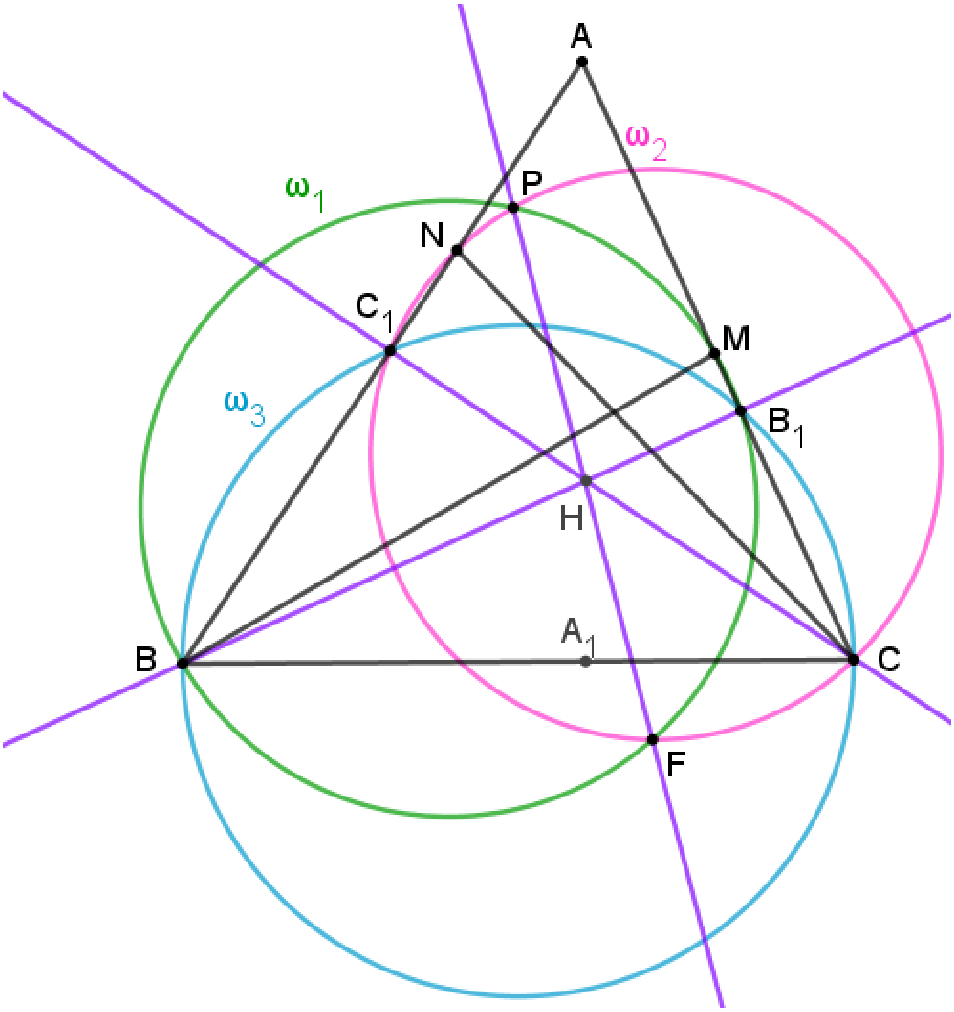

Рис. 3.

З точки B_1 відрізок BM видно під прямим кутом, тому B_1 лежить на колі ω_1. Точка C_1 лежить на колі ω_2 з діаметром NC. Точки B, C, B_1 і C_1 лежать на колі ω_3. CC_1 – радикальна вісь кіл ω_1 і ω_2, а BB_1 – радикальна вісь кіл ω_1 і ω_3. Тоді точка H – радикальний центр кіл ω_1, ω_2 і ω_3. Отже, точка H лежить на радикальній вісі кіл ω_1 і ω_2 , а тобто на прямій PF.

4. Доведення рівності відрізків.

Для доведення рівності відрізків використовують означення степеня точки відносно кола та тим фактом, що радикальний центр трьох кіл має рівні степені відносно цих кіл.

Основним засобом навчання учнів геометрії є задачі та їх системи. Вважаємо, що тільки спеціальним чином побудована система задач сприяє досягненню планованих результатів. Для побудови диференційованої системи задач з теми «Радикальна вісь кіл та її властивості» з метою підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах, турнірах, доцільно враховувати функції певної задачі в системі задач. За функцією задачі доцільно розмежовувати ті, що призначені для встановлення певного математичного факту (базова задача), і ті, головна функція яких – демонстрація правила застосування того чи іншого прийому, методу розв'язування класу задач (опорна задача). Щоб віднести задачу до опорної або базової, доцільно враховувати об'єктивні та суб'єктивні чинники. До перших ми відносимо: існування класу задач на їх застосування; частоту використання схеми розв'язування або математичного факту в інших задачах. Другий чинник пов'язаний із рівнями навченості та навальності учнів [2]. Навколо базових і опорних задач доцільно, нарощуючи складність задач, створювати блоки задач, які в сукупності утворюють систему задач з відповідної теми. Складність певної задачі блоку залежить від кількості геометричних об'єктів, поданих у задачі, кількості й типу зв'язків між ними, кількості кроків розв'язування. Кількість задач у блоках доцільно добирати залежно від рівня навчальності учнів. Їх має бути достатньо для формування вміння застосовувати факт чи прийом учнем.

Наприклад розглянемо базову задачу: «Доведіть, що радикальна вісь двох кіл перпендикулярна до прямої, що проходить через їх центри». До блоку, побудованого навколо цієї задачі, можна включити наприклад наступні задачі.

Задача 1. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і BB_1. H – точка перетину висот трикутника, P – середина HC, M – середина AB. Доведіть, що прямі MH і A_1B_1 перпендикулярні.

Задача 2. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і BB_1 та медіани AA_2 і BB_2. M – середина AB. На висоті BB_1 вибрано точку P так, що $\angle B_1PB_2 = \angle B_1A_2B_2$, H – середина PB_1. Доведіть, що прямі MH і

A_1B_1 перпендикулярні.

Задача 3. В гострокутному трикутнику ABC проведені висоти AA_1 і BB_1, а також медіана CM. Точка P – середина CM. Пряма A_1B_1 перетинає пряму AB в точці T. Доведіть, що $OP \perp TC$, де O – центр описаного кола трикутник ABC.

Задача 4. Дано шестикутник ABCDEF, в якому AB = BC, CD = DE, EF = FA, а кути A і C – прямі. Доведіть, що прямі FD і BE перпендикулярні.

Задача 5. Дано такий опуклий чотирикутник ABCD, що AB = BC і AD = DC. Точки K, L і M – середини відрізків AB, CD і AC відповідно. Перпендикуляр, проведений із точки A до прямої BC, перетинає перпендикуляр, що проведений з точки C до прямої AD, у точці H. Доведіть, що прямі KL і HM перпендикулярні.

Зазвичай малюнки до задач на застосування властивостей радикальної осі не прості у виконанні, оскільки у таких задачах потрібно побудувати кілька кіл. На нашу думку для їх побудови можна скористатися спеціальними програмами, наприклад програмою GeoGebra, яка дозволяє виконувати рисунки до геометричних задач швидко і якісно. За допомогою цієї програми можна продемонструвати: готові рисунки; процес зміни геометричних об’єктів в залежності від зміни їх параметрів; геометричні фігури в різних ракурсах; покрокову побудову рисунка. Програма GeoGebra є ефективною також на етапі висунення гіпотез в задачах. Так для вивчення властивостей кіл можна змінювати розміщення кола, що дає можливість, наприклад, висунути гіпотезу про розміщення радикальної вісі, радикального центра. Використовуючи команди «залишити слід» і «анімувати» для радикального центра, можна спостерігати утворення нової кривої. Під час побудов за допомогою циркуля і лінійки у програмі GeoGebra можна демонструвати учням покрокову побудову рисунків. Учень може користуватися програмою необхідну кількість разів до повного засвоєння того чи іншого способу побудови.

Висновки та перспективи подальших наукових розвідок. Властивості радикальної вісі допомагають розв'язувати цілий клас геометричних задач, зокрема ті, в яких треба довести, що три прямі перетинаються в одній точці; три точки належать одній прямій; прямі перпендикулярні тощо. Систему задач з теми «Радикальна вісь кіл та її властивості», мета розробки якої – підготовка учнів до олімпіад і турнірів з математики, доцільно будувати навколо базових та опорних задач з теми. Ефективним є використання програми GeoGebra.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES

1. Бунакова, А. С., Кадубовський, О. А. (2011). Про деякі застосування кіл нульового радіусу. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету СДПУ, 1, 150–161. (Bunakova, A. S., Kadubovsky, O. A. (2011). About some uses of zero radius circles. Collection of scientific works of the Physics and Mathematics Faculty of the SDPU, 1, 150-161).
2. Коломієць, О. М. (2011). Засоби навчання аналітичної геометрії в умовах диференціації. Київ-Вінниця: ТОВ Фірма «Планер», 27, 367 – 372. (Kolomiets, O. M. (2011). Means of learning analytical geometry in the conditions of differentiation. Kiev-Vinnytsia: Ltd. Company «Planer», 27, 367 – 372).
3. Лейфура, В. М., Мітельман, І. М., Радченко, В. М., Ясінський, В. А. (2008). Математичні олімпіади школярів України 2001-2006 навчальний методичний посібник. Львів : Каменяр. (Leifura, V. M., Mitelman, I. M., Radchenko, V. M, Yasinsky, V. A. (2008). Mathematical Olympiads of schoolchildren of Ukraine 2001-2006. Teaching methodical aid. Lviv : Kamenyar.).
4. Ленчук, І. Г., Франовський, А. С. (2014). Типізація і комп'ютерне моделювання конструктивних задач планіметрії: метод кіл. Інформаційні технології і засоби навчання. 39 (1), 125-140. (Lenchuk, I. G., Franovskiy, A. S. (2014). Typing and computer modeling planimetric design problems: the circle method. Information technology and training tools. 39 (1), 125-140).
5. Математичні олімпіади в Києві. Режим доступу: https://matholymp.com.ua/category/olimpiadi/. Mathematical Olympiads in Kiev. Retrieved from: https://matholymp.com/category/olimpiadi/.
6. Мерзляк, А. Г., Полонський, В. Б., Якір, М. С. (2017) Геометрія для

загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія. (Merzlyk, A. G., Polonsky, V. B., Yakir, M. S. (2017). Geometry for general educational institutions with advanced study of mathematics: textbook for 9 class general education teach institutions. Kharkiv: Gimnazia).

7. Навчальна програма з математики для учнів 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. Режим доступу: http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html. Educational program in mathematics for students 9 class for general educational institutions. Level of standard. Retrieved from: http://mon.gov.ua/activity/education/zagalna-serednya/navchalni-programy.html.
8. Навчальна програма з математики для учнів 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблене вивчення. Режим доступу: http://osvita.ua/school/program/800/. Educational program in mathematics for students 9 class for general educational institutions. In-depth study. Retrieved from: http://osvita.ua/school/program/800/
9. Понарин, Я. П. (2004). Элементарная геометрия. Т. 1. М.: МЦНМО. (Ponarin, Y. P. (2004). Elementary geometry. (Vols. 1). Moscow: MCNMO.).
10. Прасолов, В. В. (2006). Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники». (Prasolov, V. V. (2006). Planimetry tasks. Moscow: MCNMO: OAO «Moscow textbooks».).
11. Федак, І. В. (2005). Обласні олімпіади з математики 1987 – 2005 рр. : Івано-Франківськ.: ОІППО.164. (Fedak, I. V. (2005). Regional olympiads in mathematics 1987-2005 : Ivano-Frankivsk : OIPPO.).
12. Федак, І. В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. (2002). Чернівці: Зелена Буковина. (Fedak, I. V. Methods for solving mathematick Olympiad problems in mathematics amd more. (2002). Chernivtsi: Zelena Bukovina.).
13. Ясінський, В. А., Панасенко О. Б. (2014). Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Геометрія. Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД». (Yasinsky, V. A., Panasenko O. V. (2014). Secrets of students´ preparation for All-Ukrainian and International Olympiads. Geometry. Vinnytsia: LTD «Nilan-LTD».).

Коломиец О. Н., Поковба Е. В. Применение свойств радикальной оси при решении задач по геометрии.

Аннотация. Геометрические задачи, которые включаются в задания математической олимпиады в Украине на каждом из этапов, вызывают значительные затруднения в учеников, если их решение требует знания понятий, фактов о геометрических фигурах, которые не входят в учебную программу по геометрии для 7-9 классов. Примером такого понятия есть понятие радикальной оси двух окружностей.

Цель статьи – разработать отдельные методические рекомендации для обучения учащихся решать задачи с применением свойств радикальной оси.

Теоремы и факты, связанные с радикальной осью, помогают решать задачи, в которых необходимо доказать, что: три прямые пересекаются в одной точке; три точки принадлежат одной прямой; прямые перпендикулярны и др. Чтобы доказать, что три прямые пересекаются в одной точке, необходимо доказать, что эти прямые есть радикальными осями попарно взятых трёх окружностей, а чтобы доказать, что две прямые перпендикулярны, необходимо доказать, что одна из этих прямых есть радикальной осью двух окружностей, а вторая – линией их центров.

Считаем, что только специальным образом построенная система задач, способствует достижению намеченных результатов. Для построения системы задач по теме: «Радикальная ось и её свойства» целесообразно учитывать функции отдельной задачи в системе задач (задачи, предназначенные для установления отдельного математического факта (базовая задача), и те, главное задание которых – демонстрация правила применения того или иного приема, метода решения класса задач (опорная задача)). Опираясь на базовые и опорные задачи и повышая их сложность, создавать блоки. Целесообразно использовать программу GeoGebra для демонстрации: готовых рисунков к задачам; процесса изменений геометрических объектов в зависимости от изменения их параметров; геометрических фигур в разных ракурсах; пошагового построения рисунка.

Ключевые слова: обучение учеников, геометрия, радикальная ось, свойства радикальной оси, подготовка к олимпиаде по математике, степень точки, радикальный центр, программа GeoGebra.

Kolomiets O. N., Pokovba K. V. Application of the radical axis properties for solution the problems in geometry.

Summary. Geometric problems, which are included to the tasks of the mathematical competition in Ukraine at every stage, cause considerable difficulties for the pupils, if their solution requires knowledge of the notions and facts about geometric figures that are not included to the curriculum in geometry for 7-9 grades. One example of such notion is a notion of a radical axis of two circles.

The purpose of the article is to work out separate methodical recommendations concerning teaching pupils to solve problems on application the properties of the radical axis.

Theorems and facts connected with the radical axis of circles help solving the problems, where it is necessary to prove that: three straight lines are

intersected in one point; three points belong to one straight line; straight lines are perpendicular etc. Thus, to prove that three straight lines intersect in one point, it is necessary to prove that these straight lines are radical axes of the three circles taken in pairs. And to prove that these two straight lines are perpendicular, it is necessary to prove that one of these straight lines is a radical axis of two circles, and the other one is a line of their centers.

We consider that only a specially built system of problems contributes to achieving the planned results. The problems on forming, proving, research and calculation should be included to the system of problems on the theme “Radical axis of circles and its properties”; it is also necessary to take into consideration the functions of certain problem in the system of problems (problems assigned for establishment a certain mathematical fact (basic problem), and those, whose main function is a demonstration of the rule to apply one or the other way or method to solve the set of problems (supporting problem)). Around the basic and supporting problems it is appropriate to form blocks of problems for their working out, increasing the problem difficulty. It is appropriate to use the programme GeoGebra for the demonstration: of the ready drawings; the process of the geometric objects change depending on their parameters changes; geometric figures in different foreshortening; step-by-step making a drawing.

Key words: teaching pupils, geometry, radical axis, properties of the radical axis, preparation for the mathematics Olympiad, degree of point, the radical center, the GeoGebra program.