**Dr. Y. Chen[1], Dr. H. Liu[1], Dr. X. Zhang[1], Dr. Q. Wu[1]***

[1] School of Public Health and Preventive Medicine, Sun Yat-sen University, Guangzhou, China

## Узагальнення аналітичних підходів у медичному моделюванні

Метою статті є дослідити методи Діофанта розв’язування деяких нелінійних систем рівнянь у його трактаті «Арифметика» та побудувати узагальнення розв’язків, знайдених Діофантом.

Узагальнення математичних теорій і тверджень розглядається як засіб розвитку творчого мислення студентів. Це формує готовність до розвитку творчого мислення учнів у майбутній професійній діяльності.

Для розв’язання цього завдання пропонується історичний підхід, тобто використання деяких фактів, відомих з історії математики або визначних математичних задач. Це задачі з давніх творів, пам’яток або задачі, які були створені відомими математиками.

У статті досліджуються методи розв’язування текстових задач останнього визначного математика античного світу Діофанта Александрійського (III ст.) у його трактаті «Арифметика». Виокремлюються задачі, математичними моделями яких є нелінійні системи алгебраїчних рівнянь, зокрема де кількість рівнянь менша за кількість невідомих. Узагальнюються підходи Діофанта до розв’язування деяких задач з трактату «Арифметика». Виводяться формули, за якими можна визначити безліч розв’язків, серед яких є розв’язок Діофанта.

Для одержання узагальнених розв’язків використовується тотожність про суму числа та квадрата половини різниці дільника і частки цього числа. Також розв’язки системи подаються як лінійні або квадратичні функції з коефіцієнтами, які залежать від параметрів. Для конкретних значень параметрів одержуються розв’язки Діофанта. У випадку, коли розв’язки виражаються через вільні члени системи рівнянь, доводиться достатня умова для значень вільних членів, при якій розв’язки системи є цілі числа.

Робиться висновок, що методи розв’язування історичних задач та їх узагальнення повинні стати важливою складовою підготовки студентів до майбутньої професійної діяльності вчителя математики.

**Ключові слова**. узагальнення, історичні задачі, творче мислення, проблеми «Арифметики» Діофанта, системи діофантових рівнянь, підстановки Діофанта, математичні моделі арифметичних задач, узагальнення підстановок Діофанта.

**Постановка проблеми**. Узагальнення – це один з найважливіших аспектів розвитку математики. У сучасному періоді розвитку математики спостерігається тенденція до посилення ролі узагальнення в створенні загальних методів математичних досліджень.

Оскільки узагальнення – це шлях до розширення математичних знань та розвитку творчого мислення, ми в роботі зі студентами приділяємо увагу побудові узагальнень деяких відомих математичних фактів [6, с. 45]. Такий підхід можна використати при написанні ними курсових і дипломних робіт. У подальшій професійній діяльності вчителя математики можна використати визначні історичні задачі. Наприклад, задача Фібоначчі про приплід кроликів [5, с. 101] та задача Нарайани про приріст теличок [5, с. 77]. На основі цих задач нами побудовано узагальнення чисел Фібоначчі та Нарайани [3, с. 19]. Спираючись на рекомендації В. Г. Бевз про роль історії математики в навчанні студентів та учнів, зокрема визначних математичних задач [2, с. 93, 133], у даній статті ми аналізуємо розв’язки деяких текстових задач з «Арифметики» Діофанта, які приводять до нелінійних систем алгебраїчних рівнянь. Пропонуються узагальнені підстановки, за якими одержано розв’язки, з цих розв’язків випливають частинні розв’язки Діофанта.

Такі дослідження сприяють розвитку творчого мислення майбутніх учителів математики, що підкреслюється рядом науковців [8].

**Аналіз актуальних досліджень**. Діофант Александрійський (ІІІ ст.) був останнім видатним математиком античного світу. Він автор трьох творів «Арифметика», «Про многокутні числа» та «Поризми». В творах Діофанта вперше виявляється спроба користуватися буквенною символікою. За змістом «Арифметика» – це унікальне явище в історії математики. Цей трактат містить матеріал, що відноситься до теорії чисел, зокрема наведено задачі, що зводяться до невизначених рівнянь. Діофант розробляє теорію таких рівнянь. З неї в подальшому сформувалася окрема галузь математики – діофантовий аналіз.

Дві проблеми, пов'язані з «Арифметикою» Діофанта, зіграли визначну роль у подальшому розвитку математики. Перша, пов'язана з десятою проблемою Гільберта (1900 р.) – «задача про розв'язність діофантового рівняння». Ця проблема була вирішена лише в 1970 р. молодим математиком Ю. Матіясевичем з відповіддю, що не існує алгоритму для визначення існування розв'язку діофантового рівняння.

Друга проблема – це велика теорема Ферма, яка була ним сформульована на полях другої книжки «Арифметика» (1635 р.): «Рівняння $x^n+y^n=z^n$ не можна розв'язати в цілих (або раціональних) числах за умови, що n>2 і $xyz \neq 0$». Ця теорема була доведена лише в 1994 р. математиком Ендрю Вайлсом.

«Арифметика» Діофанта мала значний вплив на розвиток алгебри й теорії чисел. Розв'язання задач з «Арифметики» приводять до рівнянь або систем рівнянь з цілими коефіцієнтами, причому кількість змінних більша за кількість рівнянь. Тобто діофантових рівнянь:

$$f(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0$$

або систем рівнянь:

$$\begin{cases} f_1(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0 \\ f_2(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0 \\ \quad\ldots \\ f_m(x_1;x_2;\ldots;x_n)=0 \end{cases}$$, де n>m, $f_i$ – многочлени.

Діофант розглядає системи над полем раціональних чисел і шукає додатні раціональні розв'язки. Він виражає розв'язки у вигляді раціональних функцій від однієї змінної та параметрів, яким надає конкретних числових значень. Діофант підбирає ці функції так, щоб всі умови, крім однієї виконувалися. Останню умову використовує, щоб виразити невідоме через параметри [7, с. 131].

**Мета статті.** Дослідити методи Діофанта розв'язування деяких нелінійних систем рівнянь у його трактаті «Арифметика». Побудувати узагальнення розв'язків, знайдених Діофантом.

**Виклад основного матеріалу.** Ми розглядаємо деякі задачі з «Арифметики» Діофанта, математичними моделями яких є нелінійні діофантові системи рівнянь. Розглядаючи параметри в підстановках Діофанта в загальному вигляді, виводимо формули для розв'язування систем. В результаті одержуємо безліч розв'язків системи, серед яких є розв'язок Діофанта.

1) Знайти такі два числа, щоб їх добуток в сумі з кожним з них, давав куб [4, с. 108].

$$\begin{cases} XY + X = \alpha^3 \\ XY + Y = \beta^3 \end{cases}$$

Діофант покладає $X = 8x$, $Y = x^2 - 1$, β=2x–1, $x = \frac{14}{13}$. Розв'язок $X = \frac{112}{13}$, $Y = \frac{27}{169}$

Узагальнення.

Нехай $X = a^3 x$, $Y = b^3 x^2 - 1$. Тоді перше рівняння задовольняється $XY + X = a^3 b^3 x^3 - a^3 x + a^3 x = (abx)^3 = \alpha^3$.

З другого рівняння $XY + Y = a^3 b^3 x^3 - a^3 x + b^3 x^2 - 1 = \beta^3$.

Покладемо $\beta = abx - 1$, $a^3 b^3 x^3 - a^3 x + b^3 x^2 - 1 = a^3 b^3 x^3 - 3a^2 b^2 x^2 + 3abx - 1$, $x^2 (b^3 + 3a^2 b^2) = x(a^3 + 3ab)$, $x \neq 0$, $x = \frac{a(a^2 + 3b)}{b^2 (3a^2 + b)}$, $X = \frac{a^4 (a^2 + 3b)}{b^2 (3a^2 + b)}$, $Y = \frac{a^2 (a^2 + 3b)^2}{b(3a^2 + b)^2} - 1$.

Якщо a=2, b=1, $x = \frac{14}{13}$, $X = \frac{112}{13}$, $Y = \frac{27}{169}$. Розв'язок Діофанта.

2) Знайти таких три числа, щоб квадрат суми всіх трьох, який віднімається від кожного числа, давав квадрат [4, с. 78].

$$\begin{cases} X-(X+Y+Z)^2=\alpha^2 \\ Y-(X+Y+Z)^2=\beta^2 \\ Z-(X+Y+Z)^2=\gamma^2 \end{cases}$$

Діофант покладає $X+Y+Z=x$, $X=2x^2$, $Y=5x^2$, $Z=10x^2$, тоді $X=\frac{2}{289}$, $Y=\frac{5}{289}$, $Z=\frac{10}{289}$.

Узагальнення.

$X+Y+Z=x$, $X=(n^2+1)x^2$, $Y=((n+1)^2+1)x^2$, $Z=((n+2)^2+1)x^2$.

Тоді умови задачі виконуються.

$$X-(X+Y+Z)^2=(n^2+1)x^2-x^2=n^2x^2=\alpha^2$$

$$Y-(X+Y+Z)^2=((n+1)^2+1)x^2-x^2=(n+1)^2x^2=\beta^2$$

$$Z-(X+Y+Z)^2=((n+2)^2+1)x^2-x^2=(n+2)^2x^2=\gamma^2$$

Використовуючи підстановки й умову $X+Y+Z=x$, визначимо x.

$$X+Y+Z=(n^2+1)x^2+((n+1)^2+1)x^2+((n+2)^2+1)x^2=(3n^2+6n+8)x^2,$$

$(3n^2+6n+8)x^2=x$, $x\neq 0$, $x=\frac{1}{3n^2+6n+8}$. Розв'язок $X=\frac{n^2+1}{(3n^2+6n+8)^2}$, $Y=\frac{(n+1)^2+1}{(3n^2+6n+8)^2}$, $Z=\frac{(n+2)^2+1}{(3n^2+6n+8)^2}$, n=1, 2, 3, …

Якщо n=1, $X=\frac{2}{289}$, $Y=\frac{5}{289}$, $Z=\frac{10}{289}$ – розв'язок Діофанта.

3) Знайти три таких числа таких, щоб квадрат кожного з них доданий до суми трьох цих чисел, давав квадрат [4, с. 76].

Задача зводиться до системи рівнянь

$$\begin{cases} X^2+(X+Y+Z)=\alpha^2 \\ Y^2+(X+Y+Z)=\beta^2 \\ Z^2+(X+Y+Z)=\gamma^2 \end{cases}$$

Діофант покладає $X+Y+Z=12x^2$ і одержує розв'язок $x=\frac{4}{6}$, $X=\frac{22}{6}$; $Y=\frac{8}{6}$; $Z=\frac{2}{6}$.

Узагальнення.

Покладемо $X+Y+Z=x^2\cdot c$ і використаємо тотожність $ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, де a, b – дільники числа $c=ab$ $(a>b)$.

Число с має три пари дільників:

$$c=a_1b_1;\ a_1b_1+\left(\frac{a_1-b_1}{2}\right)^2=\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2;\ X=\frac{a_1-b_1}{2}x;$$

$$c=a_2b_2;\ a_2b_2+\left(\frac{a_2-b_2}{2}\right)^2=\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)^2;\ Y=\frac{a_2-b_2}{2}x;$$

$$c=a_3b_3;\ a_3b_3+\left(\frac{a_3-b_3}{2}\right)^2=\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right)^2;\ Z=\frac{a_3-b_3}{2}x.$$

Доведемо, що $X=\frac{a_1-b_1}{2}x$, $Y=\frac{a_2-b_2}{2}x$, $Z=\frac{a_3-b_3}{2}x$ – розв'язки, підставивши в дану систему. Оскільки $X+Y+Z=x^2\cdot c$, використавши тотожність, маємо

$$\left(\frac{a_1-b_1}{2}x\right)^2+x^2a_1b_1=x^2\left(\left(\frac{a_1-b_1}{2}\right)^2+a_1b_1\right)=x^2\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)^2=\alpha^2$$

$$\left(\frac{a_2-b_2}{2}x\right)^2+x^2a_2b_2=x^2\left(\left(\frac{a_2-b_2}{2}\right)^2+a_2b_2\right)=x^2\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)^2=\beta^2$$

$$\left(\frac{a_3-b_3}{2}x\right)^2+x^2a_3b_3=x^2\left(\left(\frac{a_3-b_3}{2}\right)^2+a_3b_3\right)=x^2\left(\frac{a_3+b_3}{2}\right)^2=\gamma^2$$

Одержали в правій частині квадрати.

Щоб визначити x, використаємо умову $X+Y+Z=cx^2$.

$\frac{a_1-b_1}{2}x+\frac{a_2-b_2}{2}x+\frac{a_3-b_3}{2}x=cx^2$, $\frac{(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)}{2}x=cx^2$, $x\neq 0$,

$x=\frac{(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)}{2c}$.

Відповідь: $X=\frac{a_1-b_1}{2}x$, $Y=\frac{a_2-b_2}{2}x$, $Z=\frac{a_3-b_3}{2}x$, $c=a_1b_1$, $c=a_2b_2$, $c=a_3b_3$

, с має три пари дільників, $x=\frac{(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)}{2c}$.

Якщо $c=12$, $12=12\cdot 1$, $12=6\cdot 2$, $12=4\cdot 3$, $x=\frac{(12-1)+(6-2)+(4-3)}{2\cdot 12}=\frac{4}{6}$,

$X=\frac{22}{6}$; $Y=\frac{8}{6}$; $Z=\frac{2}{6}$ – розв'язок Діофанта.

4) Знайти три таких числа, щоб сума будь-яких двох, помножена на третє, дорівнювала заданому числу [4, с. 98].

$$\begin{cases}(X+Y)Z=\alpha\\(Y+Z)X=\beta\\(X+Z)Y=\gamma\end{cases}.$$

Діофант покладає $\alpha=35$, $\beta=27$, $\gamma=32$, $X=\frac{15}{x}$, $Y=\frac{20}{x}$, $Z=x$.

Визначає x=5, X=3, Y=4, Z=5.

Узагальнення. Покладаємо $Z=x$, тоді з першого рівняння $(X+Y)x=\alpha$, $X+Y=\frac{\alpha}{x}$. Нехай $X=\frac{y}{x}$, тоді $Y=\frac{\alpha-y}{x}$, де у – невідоме.

Підставимо значення $X=\frac{y}{x}$, $Y=\frac{\alpha-y}{x}$, $Z=x$ в друге і третє рівняння.

$\begin{cases}\left(\frac{\alpha-y}{x}+x\right)\frac{y}{x}=\beta\\\left(\frac{y}{x}+x\right)\frac{\alpha-y}{x}=\gamma\end{cases}$, $\begin{cases}\frac{\alpha y-y^2}{x^2}+y=\beta\\\frac{\alpha y-y^2}{x^2}+(\alpha-y)=\gamma\end{cases}$. Щоб система була сумісна

різниця $\alpha-y$ та у має дорівнювати різниці γ та β.

$(\alpha - y) - y = \gamma - \beta$, $\quad y = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$. Тоді $\quad X = \frac{y}{x} = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2x}$,

$Y = \frac{\alpha - y}{x} = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2x}$, $Z = x$.

Визначимо x з другого або третього рівняння системи.

$\left(\frac{\alpha - \beta + \gamma}{2x} + x\right)\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2x} = \beta$, $\quad \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2x} \cdot \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2x} + \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \beta$,

$\frac{\alpha - \beta + \gamma}{2x} \cdot \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2x} = \frac{-\alpha + \beta + \gamma}{2}$, $\quad 2x^2(-\alpha + \beta + \gamma) = (\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)$,

$x^2 = \frac{(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}{2(-\alpha + \beta + \gamma)}$.

Відповідь: $\quad X = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2x}$, $\quad Y = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2x}$, $\quad Z = x$,

$x^2 = \frac{(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}{2(-\alpha + \beta + \gamma)}$.

Якщо $\alpha = 35$, $\beta = 27$, $\gamma = 32$, $x^2 = \frac{40 \cdot 30}{2 \cdot 24} = 25$, x=5, $X = \frac{30}{10} = 3$,

$Y = \frac{40}{10} = 4$, z=5 – розв’язок Діофанта.

Визначимо, для яких значень α, β, γ розв’язок системи, обчислений за формулами $X = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2x}$, $Y = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2x}$, $Z = x$, $x^2 = \frac{(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}{2(-\alpha + \beta + \gamma)}$ буде виражений у цілих числах.

Якщо $\alpha - \beta + \gamma = \lambda \cdot \lambda_1$, $\quad \alpha + \beta - \gamma = \lambda \cdot \lambda_2$, $\quad -\alpha + \beta + \gamma = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2}$, то

$x^2 = \frac{\lambda \cdot \lambda_1 \cdot \lambda \cdot \lambda_2}{2 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{2}} = \lambda^2$, $\quad x = \lambda$, $\quad X = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2x} = \frac{\lambda \cdot \lambda_2}{2\lambda} = \frac{\lambda_2}{2}$,

$Y = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2x} = \frac{\lambda \cdot \lambda_1}{2\lambda} = \frac{\lambda_1}{2}$

Маємо розв'язок $X=\frac{\lambda_2}{2}$, $Y=\frac{\lambda_1}{2}$, Z=λ в цілих числах, якщо $\alpha-\beta+\gamma=\lambda\cdot\lambda_1$, $\alpha+\beta-\gamma=\lambda\cdot\lambda_2$, $-\alpha+\beta+\gamma=\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}$.

У Діофанта: $\alpha+\beta-\gamma=30=5\cdot 6$, $\alpha-\beta+\gamma=40=5\cdot 8$, $-\alpha+\beta+\gamma=\frac{8\cdot 6}{2}=24$, λ=5, $\lambda_1$=8, $\lambda_2$=6, $X=\frac{\lambda_2}{2}=3$, $Y=\frac{\lambda_1}{2}=4$, z=λ=5.

Знайдемо, як вибирати значення вільних членів α, β, γ в системі, щоб вона мала цілі розв'язки.

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=\lambda\cdot\lambda_1\\ \alpha+\beta-\gamma=\lambda\cdot\lambda_2\\ -\alpha+\beta+\gamma=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{2}\end{cases}$$ За формулами Крамера $\alpha=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\beta=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\gamma=\frac{\Delta_3}{\Delta}$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}\lambda\cdot\lambda_1 & -1 & 1\\ \lambda\cdot\lambda_2 & 1 & -1\\ \frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{2} & 1 & 1\end{vmatrix}=2\lambda(\lambda_1+\lambda_2),$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & \lambda\cdot\lambda_1 & 1\\ 1 & \lambda\cdot\lambda_2 & -1\\ -1 & \frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{2} & 1\end{vmatrix}=\lambda_2(\lambda_1+2\lambda),\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -1 & \lambda\cdot\lambda_1\\ 1 & 1 & \lambda\cdot\lambda_2\\ -1 & 1 & \frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{2}\end{vmatrix}=\lambda_1(\lambda_2+2\lambda).$$

$$\alpha=\frac{\lambda}{2}(\lambda_1+\lambda_2),\ \beta=\frac{\lambda_2}{4}(\lambda_1+2\lambda),\ \gamma=\frac{\lambda_1}{4}(\lambda_2+2\lambda).$$

У Діофанта λ=5, $\lambda_1$=8, $\lambda_2$=6, $\alpha=\frac{5}{2}(8+6)=35$, $\beta=\frac{6}{4}(8+10)=27$, $\gamma=\frac{8}{4}(6+10)=32$.

Отже, якщо вибирати α, β, γ за формулами $\alpha=\frac{\lambda}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$, $\beta=\frac{\lambda_2}{4}(\lambda_1+2\lambda)$, $\gamma=\frac{\lambda_1}{4}(\lambda_2+2\lambda)$, то системи будуть мати цілі розв'язки.

Наприклад, якщо вибрати $\lambda$=10, $\lambda_1$=4, $\lambda_2$=12, то $\alpha = 5\cdot 16 = 80$, $\beta = 3\cdot 24 = 72$, $\gamma = 1\cdot 32 = 32$, $\begin{cases}(X+Y)Z = 80\\ (Y+Z)X = 72\\ (X+Z)Y = 32\end{cases}$, $x^2 = \dfrac{40\cdot 120}{2\cdot 24} = 100$, x=10,

$X = \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2x} = \dfrac{80+72-32}{20} = 6$, $Y = \dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2x} = \dfrac{80-72+32}{20} = 2$, $Z = 10$.

5) Знайти два таких числа, щоб квадрат кожного з них, доданий до суми, давав квадрат [4, с. 71].

$\begin{cases}X^2 + X + Y = \alpha^2\\ Y^2 + X + Y = \beta^2\end{cases}$. Діофант покладає X=x, Y=x+1, β=x–2, і одержує розв'язок $x = \dfrac{2}{8}$, $X = \dfrac{2}{8}$, $Y = \dfrac{10}{8}$.

Узагальнення.

Нехай X=ax, Y=ax+1, тоді перша умова виконується $X^2 + X + Y = (ax+1)^2$. Підставимо в друге рівняння

$$Y^2 + X + Y = (ax+1)^2 + ax + ax + 1 = a^2x^2 + 4ax + 2 = \beta^2.$$

Покладемо $\beta = ax - b$, $\beta^2 = (ax-b)^2 = a^2x^2 - 2abx + b^2$,

$$a^2x^2 + 4ax + 2 = a^2x^2 - 2abx + b^2,\ 4ax + 2abx = b^2 - 2,\ x = \frac{b^2-2}{2a(b+2)}.$$

Відповідь: X=ax, Y=ax+1, де $x = \dfrac{b^2-2}{2a(b+2)}$.

Якщо a=1, b=2, X=x, Y=x+1, $x = \dfrac{2}{8}$ – розв'язок Діофанта.

6) Знайти три таких числа, щоб квадрат суми всіх трьох, доданий до кожного з цих чисел, давав квадрат [4, с. 77].

$$\begin{cases}(X+Y+Z)^2 + X = \alpha^2\\ (X+Y+Z)^2 + Y = \beta^2\\ (X+Y+Z)^2 + Z = \gamma^2\end{cases}.$$

Діофант покладає X+Y+Z=x, $X=3x^2$, $Y=8x^2$, $Z=15x^2$ і визначає розв'язок $x=\frac{1}{26}$, $X=\frac{3}{676}$, $Y=\frac{8}{676}$, $Z=\frac{15}{676}$.

Узагальнення.

X+Y+Z=x, $X=\left(a^2-1\right)x^2$, $Y=\left(b^2-1\right)x^2$, $Z=\left(c^2-1\right)x^2$. Тоді всі умови задовольняються. Визначимо x.

X+Y+Z=x, $X+Y+Z=\left(a^2-1\right)x^2+\left(b^2-1\right)x^2+\left(c^2-1\right)x^2$, $x=\left(a^2+b^2+c^2-3\right)x^2$, $x\neq 0$, $x=\frac{1}{a^2+b^2+c^2-3}$.

Відповідь: $X=\left(a^2-1\right)x^2$, $Y=\left(b^2-1\right)x^2$, $Z=\left(c^2-1\right)x^2$, $x=\frac{1}{a^2+b^2+c^2-3}$.

Якщо a=2, b=3, c=4, $x=\frac{1}{26}$, $X=3x^2$, $Y=8x^2$, $Z=15x^2$ – розв'язок Діофанта.

Можна запропонувати іншу підстановку X+Y+Z=ax, X=2ax+1, Y=4ax+4, Z=6ax+9.

Підставимо в рівняння системи:

$a^2x^2+2ax+1=\left(ax+1\right)^2=\alpha^2$,

$a^2x^2+4ax+4=\left(ax+2\right)^2=\beta^2$,

$a^2x^2+6ax+9=\left(ax+3\right)^2=\gamma^2$. Всі три умови виконуються.

Визначимо x з умови X+Y+Z=ax. (2ax+1)+(4ax+4)+(6ax+9)=ax, 12ax+14=ax, $x=-\frac{14}{11a}$, $X=2ax+1=-\frac{28}{11}+1=-\frac{17}{11}$, $Y=4ax+4=-\frac{56}{11}+4=-\frac{12}{11}$, $Z=6ax+9=-\frac{84}{11}+9=\frac{15}{11}$.

Відповідь: $X=-\frac{17}{11}$, $Y=-\frac{12}{11}$, $Z=\frac{15}{11}$.

**Висновки та перспективи подальших розвідок**. Застосувавши підходи Діофанта до розв'язування арифметичних задач, що зводяться до нелінійних систем алгебраїчних рівнянь, ми вивели формули для розв'язування таких систем. В результаті можна одержати безліч розв'язків і для конкретних значень параметрів одержати розв'язок Діофанта. Важливим є подальше дослідження методів розв'язування алгебраїчних рівнянь, визначених нелінійних систем алгебраїчних рівнянь. Очевидним є висновок, що методи досліджень математиків різних часів повинні стати невід'ємною частиною математичної освіти і сучасних наукових досліджень.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ / REFERENCES


1. Бородін, О. І., Бугай, А. С. (1973). Біографічний словник діячів у галузі математики. К.: Вища школа. (Borodin O. I. Buhai A. S. (1973). Biographical dictionary of prominent figures in the field of mathematics. Kyiv: Vushcha shkola).
2. Бевз, В. Г. (2005). Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. (Bevz, V. H. (2005). History of mathematics in teacher training: Monograph. – Kyiv: National Drahomanov Pedagogical University).
3. Дідківська, Т. В., Сверчевська, І. А. (2016). Узагальнення чисел Фібоначчі. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми, 7-8, 19-26. (Didkivska, T. V., Sverchevska, I. A. (2016). The generalization of the Fibonacci numbers. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Sumy,7-8, 19-26).
4. Диофант Александрийский. (1976). Арифметика и книга о многоугольных числах. Под ред. И. Н. Веселовского; ред. и ком. И. Г. Башмаковой. М.: Наука. (Diophantus of Alexandria. (1976). Arithmetics and a book of multiangle numbers. Ed. I. N. Veselovskii, ed. and comments of I. G. Bashmakova. Moskow: Nauka).
5. Конфорович, А. Г. (1981). Визначні математичні задачі К.: Рад. шк. (Konforovytch, A. H. (1981). Famous mathematical problems. Kyiv: Radianska shkola).
6. Сверчевська, І. А. (2002). Узагальнення золотого перерізу. Математика в школі, 3, 45–47. (Sverchevska, I. A. (2002). The generalization of golden section. Mathematics at School, 3, 45–47).
7. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия. (1976). Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение.

(Antology of History of Mathematics. Arithmetic and Algebra. Number Theory. Geometry. (1976). Ed. A. P. Yushkevich. M.: Prosveschenie).

8. Чашечникова, О. С. Колесник, Є. А. (2013). Спрямованість фахової підготовки майбутнього вчителя математики на формування готовності до розвитку творчого мислення учнів. Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти». Суми, 2, 191-200. (Chashechnikova, O. S., Kolesnyk, E. A. (2013). Orientation professional future teacher ofmathematics in readiness to students of creative thinking. Collection of scientific works «Topical issues of natural science and mathematics education». Sumy, 2, 191-200).

**Сверчевская И. А. Обобщение подстановок Диофанта.**

**Аннотация.** Целью статьи является исследование методов Диофанта решения некоторых нелинейных систем уравнений в его трактате «Арифметика» и построение обобщения решений, найденных Диофантом.

Обобщение математических теорий и утверждений рассматривается как способ развития творческого мышления студентов. Это формирует готовность к развитию творческого мышления учеников в будущей профессиональной деятельности.

Для решения этого задания предлагается исторический подход, то есть использование некоторых фактов, известных из истории математики или замечательных математических задач. Это задачи из давних сочинений или задачи, созданные известными математиками.

В статье исследуются методы решения текстовых задач последнего выдающегося математика античного мира Диофанта Александрийского (III ст.) в его трактате «Арифметика». Выделяются задачи, математическими моделями которых являются нелинейные системы алгебраических уравнений, в частности, где количество уравнений меньше, чем количество неизвестных. Обобщаются подходы Диофанта к решению некоторых задач из трактата «Арифметика». Выводятся формулы, по которым можно определить бесконечное множество решений, среди которых есть решение Диофанта.

Для получения обобщенных решений используется тождество про сумму числа и квадрата половины разности делителя и частного этого числа. Также решения системы подаются как линейные или квадратичные функции с коэффициентами, зависящими от параметров. Для конкретных значений параметров получаются решения Диофанта. В случае, когда решения выражаются через свободные члены системы уравнений, доказывается достаточное условие для значений свободных членов, при котором решения системы – целые числа.

Делается вывод, что методы решения исторических задач и их обобщения должны стать важной составляющей подготовки студентов к будущей профессиональной деятельности учителя математики.

**Ключевые слова:** обобщение, исторические задачи, творческое мышление, проблемы «Арифметики» Диофанта, системы диофантовых уравнений, подстановки Диофанта, математические модели арифметических задач, обобщение подстановок Диофанта.

**Sverchevska I. A. A generalization of Diophantus' substitutions**.

**Summary**. The study considers the Diophantus' methods of solving certain systems of nonlinear equations given in the "Arithmetica" treatise, and further suggests the generalization of solutions founded by Diophantus.

The author regards the method of generalization of mathematical theories and statements as a means of developing students' creative thinking. It formates their readiness to develop creative thinking in their future pupils.

To archive this goal, the work proposes a historical approach based on using some facts from the history of mathematics, as well as famous mathematical problems. The latter include the problems from ancient treatises and the problems, formulated by famous mathematicians.

The study investigates the methods of solving word problems authored by Diophantus of Alexandria (3rd century CE), the last great mathematician of Antiquity, in his "Arithmetica" treatise.

The article considers the problems with mathematical models, based on systems of nonlinear algebraic equations containing fewer equations than unknowns. The work gives a generalization of Diophantus' approaches to solving some problems from "Arithmetica" treatise. The work derives formulas for an infinite number of solutions, including Diophantine solution.

Generalized solutions are identified using the identity for the sum of the number and the square of half of the difference between denominator and quotient of this number.

The solutions of the system are also presented as linear or quadratic functions with parameter-dependent coefficients. The study obtains the solutions for specific parameter values. Otherwise, the sufficient condition for free terms values is proven, in which all the solutions are integers.

The paper concludes that the methods of solving historical tasks, as well as their generalization, ought to be an important component of training future teachers of mathematics.

**Key words:** generalization, famous historical tasks, creative thinking, problems of Diophantus' "Arithmetica", Diophantine systems, Diophantus' substitutions, mathematical models of arithmetic problems, a generalization of Diophantus' substitutions.